1.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Esta aula inicial abordará algumas observações, cuidados e dicas de aplicabilidade geral na resolução de problemas olímpicos.

1).– Tipos de problemas matemáticos
2).– Problemas matemáticos fechados X abertos
3).– Atitudes na resolução de um problema
4).– Atitudes positivas, suas estratégias
5).– Atitudes negativas, suas estratégias
6).– Dicas gerais para a resolução de problemas difíceis

1).– Tipos de problemas matemáticos

– **Problemas de treinamento:** consistem em uma *aplicação bastante direta* de teoremas e procedimentos já estudados, e têm como objetivo ajudar a memorizar esses resultados e mecanizar sua aplicação ou uso. É o tipo de problemas que tipicamente se é solicitado a resolver na Escola.

– **Problemas de concursos** públicos e vestibulares: têm o mesmo nível de exigência de conhecimentos e habilidades matemáticas que os de treinamento na Escola, mas tipicamente são apresentados no meio de uma “nuvem de fumaça", colocando-se várias opções bastante semelhantes. A não ser pela capacidade de descartar as opções falsas, o que pode requerer muito cuidado e um conhecimento bem preciso, não requerem maior talento matemático.

– **Problemas olímpicos:** caracterizam-se por serem *desafios inéditos* onde, de modo completo ou incompleto, é dado o que se pede calcular, construir ou demonstrar, *mas,* num primeiro instante, ainda não se sabe o caminho para lá chegar. Exigem bastante criatividade e, principalmente em olimpíadas nacionais e internacionais, bastante talento matemático. Mais do que conhecimento de resultados de aula, costumam ser decisivos o conhecimento da resolução de problemas semelhantes e talvez uma boa velocidade de raciocínio.

– **Problemas profissionais:** são versões mais difíceis, complicadas, longas e talvez interdisciplinares dos problemas olímpicos. Consistem no trabalho de pesquisa no setor acadêmico (universidades, institutos) e em certas áreas do governo, sistema militar, sistema financeiro, etc. Sua resolução pode envolver anos e trabalho em equipe.

– Problemas de treinamento e concursos: rotina, conhecimento.
– Problemas olímpicos e profissionais: inéditos, criatividade, talento.

> Os problemas da ORM Grande PoA serão um pouco diferentes dos da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), pois exigirão um bom conhecimento do material teórico coberto neste Curso Preparatório e alguma experiência na resolução dos problemas olímpicos semelhantes aos que serão propostos na correspondente parte prática.

2).– Problemas matemáticos fechados X abertos

- Num **problema fechado** lhe é dito clara e completamente o que V. tem de fazer, ficando para V. descobrir como fazer isso. Por exemplo: "Prove que não existe nenhum número primo par maior do que 2", "Expanda em potências de x e y a expressão $(2x+5y)^3$", "Ache todas as raízes da equação $x^3 - x - 1 = 0$", etc.
- Num **problema aberto** o enunciado envolve tanto descobrir o que exatamente se precisa calcular, construir ou demonstrar como descobrir como fazer isso. Por exemplo, em "Que padrão geral segue de $5^2 - 5 = 4^2 + 4$, $7^2 - 7 = 6^2 + 6$, etc.?"entende-se que V. deve descobrir um padrão envolvido e mostrar que ele vale sempre.

  Tipicamente, a resolução de um problema aberto inicia com uma experimentação ou cálculos exploratórios que lhe permitirão induzir uma **conjectura** (= dar um “chute”) do que exatamente se precisa fazer para resolver o problema. Numa segunda etapa, passa-se à demonstração da veracidade dessa conjectura, ou à constatação de sua falsidade (o que nos obrigará a modificar/refazer a conjectura inicial, talvez com novas experimetações). Isso é uma arte que precisa ser cultivada/desenvolvida com a resolução de muitos problemas e fazendo cursos de treinamento com professores experientes.

  Conjectura

Vamos trabalhar um pouco em cima desses dois conceitos.

Exemplo –
Que padrão geral segue de $5^2 - 5 = 4^2 + 4$, $7^2 - 7 = 6^2 + 6$, *etc. ?*
(Como explicado acima, a resolução de um problema desse tipo envolve a formulação de uma conjectura e a demonstração de sua veracidade.)

Exemplo –
Que padrão geral segue de $(20+25)^2 = 2025$, $(30+25)^2 = 3025$, *etc. ?*

3).– Atitudes na resolução de um problema

Sempre devemos ter em mente que a afirmação envolvida num problema matemático pode ser verdadeira ou falsa, pois quem afirmou pode ter se expressado mal ou ter se enganado. Assim, depois de termos lido cuidadosamente o que foi afirmado (como numa questão de olimpíada), e em função de nossa experiência/conhecimento, adotamos uma alternativa dentre

- **atitude positiva:** passamos a procurar demonstrar que a afirmação é verdadeira;
- **atitude negativa:** passamos a procurar mostrar que a afirmação é falsa.

Em princípio, devemos iniciar com uma atitude positiva. Um insucesso demorado pode recomendar mudar para atitude negativa, pois uma possibilidade é ter ocorrido erro no enunciado do problema, o que não é raro ocorrer em olimpíadas.

4).– Atitudes positivas, suas estratégias

Existem duas estratégias ou maneiras para demonstrarmos a veracidade de uma afirmação:

- **demonstração construtiva**, onde calculamos os números com a propriedade afirmada, ou fazemos a fatoração afirmada, ou contruímos a figura que tem as propriedades afirmadas, etc.;
- **demonstração por dedução**, onde deduzimos logicamente que tem de existir um objeto afirmado, ou que tem de valer uma propriedade afirmada, etc.

A tendência do inexperiente é de resolver os problemas construtivamente. Contudo, frequentemente ocorre que essa estratégia exija muitos cálculos, o que pode torná-la proibitiva no tempo limitado de uma prova olímpica. Entenderemos melhor o que acima foi dito, fazendo alguns exemplos.

Exemplo –
Se n for um inteiro positivo ímpar, então também n^2 será ímpar.

– *Solução construtiva:*
neste caso, é inviável pois teríamos de mostrar para as infinitas possibilidades de n ($n = 1$, $n = 3$, $n = 5$, etc.) que teríamos n^2 ímpar.

– *Solução dedutiva:*
todo ímpar é da forma $n = 1+2k$, com k inteiro; logo,

$$n^2 = (1+2k)^2 = 1+4k+4k^2 = 1+2(2k+2k^2) = 1+\text{par} = \text{ímpar}\,.$$

Exemplo –
Mostrar que todo número real r pode ser escrito como a soma de dois irracionais.

– *Solução construtiva:*
dividimos em dois casos: r racional e r irracional.
Se r for racional, a decomposição é $(r-\sqrt{2})+(\sqrt{2}) = r$. (Justifique as irracionalidades)
Se r for irracional, usamos $\left(\frac{r+1}{2}\right)+\left(\frac{r-1}{2}\right) = r$. (Justifique)

Exemplo –
Mostrar que vale uma fatoração da forma $x^3+1 = (x+1)(ax^2+bx+c)$.

– *Solução construtiva:*
mostro a existência de ax^2+bx+c calculando o quociente de x^3+1 por $x+1$.
– *Solução dedutiva:*
observo que -1 é raiz da equação $x^3+1 = 0$, logo vale uma fatoração da forma $x^3+1 = (x+1)q(x)$, onde $q(x)$ é um polinômio de grau 2.

Observe que a primeira solução calcula os valores de a, b, c e a segunda resolve o problema sem precisar fazer isso.

Para guardar!

• Para demonstrar a veracidade de afirmações envolvendo um número *finito* de possibilidades ou casos, temos duas escolhas: ou verificamos/calculamos, caso a caso, TODOS os casos, ou usamos algum argumento dedutivo genérico (ou seja um raciocínio que englobe todos os casos).

• Em afirmações com um número *infinito* de casos, só há um caminho: temos de usar um raciocínio genérico.

TESTAR ALGUMAS ou mesmo muitas possibilidades/casos de uma afirmação matemática *não é demonstrar*. É obrigatório tratar de todas elas!

5).– Atitudes negativas, suas estratégias

Objetivam demonstrar que afirmação dada é falsa (não verdadeira). Também são de dois tipos:

- **por contraexemplo**, meramente achamos um exemplo para o qual a afirmação é falsa;
- **por contradição**, passamos a mostrar que se afirmação dada fosse verdadeira isso nos levaria a um resultado absurdo (tal como $1 = 0$, ou $x^2 > 1$ quando $0 < x < 1$, etc.)

Exemplo – (decisão negativa por contraexemplo)
Da fórmula $p(n) = n^2 - n + 41$ sempre resulta um número primo, se n inteiro positivo.

A experimentação tende nos levar a uma atitude positiva, pois $p(1) = 1^2 - 1 + 41 = 41$, $p(2) = 2^2 - 2 + 41 = 43$, $p(3) = 3^2 - 3 + 41 = 47$, ..., $p(7) = 7^2 - 7 + 41 = 83$, etc. Contudo, isso é ilusão, pois $p(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ não é primo. Ou seja: $n = 41$ é um *contraexemplo* falsificando a afirmação do problema.

Exemplo – (pode ser difícil achar um contraexemplo)
Lá por 1640, Pierre Fermat observou que $1 + 2^{(2)} = 5$, $1 + 2^{(2^2)} = 1 + 2^4 = 17$, $1 + 2^{(2^3)} = 1 + 2^8 = 257$, $1 + 2^{(2^4)} = 1 + 2^{16} = 65\,537$ são todos números primos. Disso, conjecturou que

$$F(n) = 1 + 2^{(2^n)} \textit{ sempre é primo, se } n \textit{ for inteiro positivo.}$$

Como os valores de $F(n)$ crescem muito rapidamente, naquela época era muito dificil testar a veracidade dessa conjectura. Assim, passaram-se 100 anos, até que o grande matemático Leonhard Euler achou um contraexemplo da conjectura de Fermat, mostrando que $F(5)$ não é primo, pois tem fatoração não trivial:

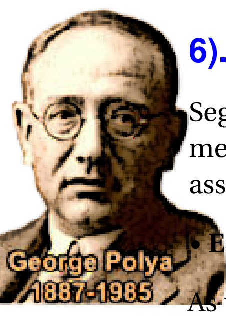
$$F(5) = 1 + 2^{32} = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417\,.$$

(CURIOSIDADE: com o advento da Matemática Computacional baseada nos computadores eletrônicos, o que ocorreu com a Segunda Guerra Mundial, tornou-se tarefa de menos de um segundo verificarmos que $F(5)$ tem fatoração não trivial. Comprove isso usando um sistema de computação simbólica –tal como o `Maple`, `Mathematica`, `Sage`, ou `Maxima`–, para mostrar em menos de um segundo que $1 + 2^{64} = 274177 \times 67280421310721$, uma tarefa irrealizável até poucos anos atrás.)

Exemplo – (negativa por contradição)
Existe n inteiro positivo verificando $n^2 + 2n + 3 = n(n+1)$.

Mostremos a falsidade dessa afirmação por contradição. Se essa igualdade valesse, teríamos $n^2+2n+3=n^2+n$, a qual simplificada nos levaria à $n+3=0$, o que é obviamente um absurdo, pois n é inteiro *positivo*.

Exemplo – (outra decisão negativa por contradição)
Existe um número real x tal que $x^4<x<x^2$.
Com efeito, se ela valesse, como $x^4\geqslant 0$, ela nos daria que x é positivo. Daí, dividindo a desigualdade dada por x, obteríamos $x^3<1<x$, logo $1<x$. Ora, multiplicando por nosso $x>0$, de $1<x$ seguem $x<x^2$ e $x^2<x^3$, ou seja $x<x^2<x^3$, o que é absurdo frente a $x^3<1<x$, pois *ao mesmo tempo* teríamos $x<x^3$ e $x^3<x$.



6).– Dicas gerais para a resolução de problemas difíceis

Seguem-se algumas recomendações para a resolução de problemas olímpicos, baseadas principalmente nos livros de George Polya, reconhecido como uma das maiores autoridades mundiais no assunto.

• **Estude versões extremas do problema**

Às vezes, em dificuldade para resolvermos um problema, podemos tratar de uma ou mais versões extremas dele, tais como quando todos os números envolvidos são iguais, ou casos envolvendo um número muito grande, ou muito pequeno, dos objetos envolvidos no problema, e mil e uma outras possibilidades. Além de isso sempre contar pontos, o exame desses casos extremos pode nos mostrar o caminho para resolver o problema geral.

Ainda nesta linha de pensamento, V. também pode pensar em *modificar* o problema, por exemplo, removendo ou acrescentando restrições visando obter uma versão mais fácil dele. Novamente, pode ocorrer que o estudo dessa versão modificada lhe traga uma ideia útil para resolver o problema original.

Exemplo –
Dois homens estão sentados numa mesa retangular, cada um com um saco de moedas de 10 centavos. Um deles coloca uma moeda na mesa, depois o outro faz o mesmo, e assim eles continuam, alternadamente. A regra do jogo exige que todas as moedas sejam colocadas deitadas e nunca sobre nenhuma outra já na mesa. O vencedor será quem poder colocar a última moeda, e ele ganhará todas elas. Supondo que cada jogador faça o melhor possível, quem ganhará o jogo?
Dica: o que V. poderia considerar como versões extremas desse jogo?

• **Pode ser mais fácil resolver o problema se o dividirmos em casos**

Com isso, queremos dizer que, em vez de tentarmos resolver um dado problema diretamente na forma com que ele é apresentado, pode ser muito mais viável dividí-lo em vários casos, cada um dos quais é fácil de resolver. Já encontramos um exemplo dessa situação quando mostramos que *todo número real pode ser escrito como a soma de dois irracionais*, dividindo esse problema em dois casos: o número dado é racional e o número dado é irracional.
Exemplo –
Mostre que $1+(-1)^n(2n-1)$ sempre é múltiplo de 4, para n inteiro positivo.
Dica: divida o problema em dois casos: n par e n ímpar.

• Desenhe uma figura ou esquema resumindo os dados

Esta é uma recomendação valiosa, principalmente em problemas com enunciado longo. A ideia é que "uma figura bem feita pode valer mil palavras", o que facilitará a compreensão do problema e talvez até sugira um caminho para resolvê-lo.

Exemplo –

Zé Bobão estava caminhando sobre os trilhos de trem, e já tinha atravessado 45% *de uma ponte férrea quando ouviu o apito de um trem que chegava por trás dele. Independentemente de Zé continuar caminhando para frente, ou para trás, ele percebe que consegue sair da ponte no momento exato que o trem chega. Sabendo que o trem vinha a* 60 *km/h, calcular a velocidade com que Zé caminha.*

Resp.: 6 km/h.

• Pode ocorrer de ser mais fácil resolver o problema "do fim para o começo"

Exemplo –

Zé foi a um festival de música que durou três dias. No primeiro dia, Zé gastou R$ 3 com o ingresso, e a metade do que tinha com comes e bebes, e para voltar para casa gastou mais R$ 3. Usando o dinheiro que tinha sobrado, Zé voltou no segundo dia e novamente pagou R$ 3 de ingresso, gastou a metade do que sobrou com comes e bebes, e desembolsou mais R$ 3 para voltar para casa. Repetindo a rotina no terceiro dia, ao chegar em casa viu que estava sem dinheiro. Pergunta-se: com quanto de dinheiro ele foi ao festival no primeiro dia?

Resp.: R$ 63.

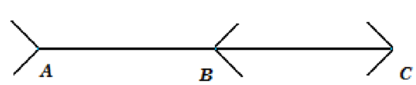
• Cuidados na resolução de problemas geométricos

Embora seja muito recomendável usar figuras, temos de estar alertas para não sermos enganados por elas. Tais enganos podem ocorrer de duas maneiras principais.

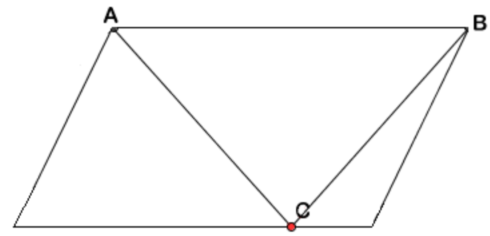
a). Muitas vezes fica difícil fazermos um desenho que exiba todas as características do objeto geométrico em estudo. Se nosso desenho for muito particular, é quase certo que acabaremos tirando alguma conclusão errada. O mesmo tende a ocorrer com desenhos feitos grosseiramente, ou por pessoa com pouca experiência.

b). Pode ocorrer que um dado desenho nos leve a uma ilusão geométrica, tal como achar que duas retas são concorrentes, quando na verdade são paralelas; podemos achar que um segmento x é maior que um segmento y, quando na verdade y é o maior deles. As figuras a seguir ilustram dois exemplos do que acabamos de alertar.

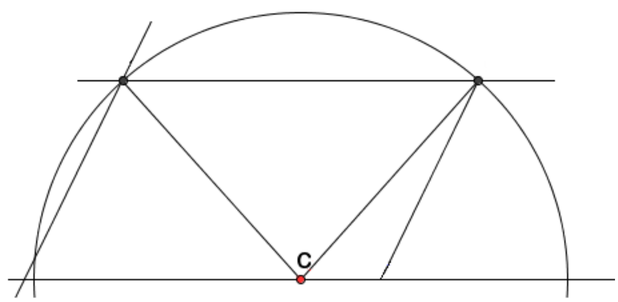
Olhando a figura abaixo, quem é o maior segmento: AB*, ou* CD*?*



E, para a próxima figura abaixo, quem é o maior segmento: CA*, ou* CB*?*



Examinando a figura seguinte, que explica como a anterior foi construída, V. mantém sua resposta?



• **Cuidado com o emprego de certas palavras**

Uma fonte muito comum de erros, principalmente quando da leitura do enunciado de um problema olímpico, ocorre com a interpretação errônea do significado das seguintes palavras:

todo, qualquer, um, necessário X suficiente, etc.

Exemplo –
São dois problemas completamente diferentes responder às questões seguintes: "Qual o menor número de movimentos necessários para fazer a construção X?"e "Qual o menor número de movimentos suficientes para fazer a construção X?". Independentemente de quem seja tal construção X, a primeira questão tem uma resposta trivial: um, enquanto que a segunda pode ser de resolução extremamente difícil, conforme a natureza de tal construção.

Também é preciso atentar para o fato de que algumas palavras têm um significado e uso no cotidiano que não corresponde perfeitamente ao que ocorre na Matemática. Por exemplo, no cotidiano empregamos a palavra círculo no sentido de curva, enquanto que na Matemática (na maioria dos livros nacionais da atualidade) é usada no sentido de superfície.

Além disso, cabe lembrar que a Matemática exige uma alta precisão que nem sempre existe na vida cotidiana (a não ser em algumas atividades como o Direito); assim, a expressão "o conjunto dos frutos daquela árvores" não é aceitável na Matemática (pois, "aquilo lá é um fruto ou ainda uma flor?"); ou seja, a palavra "conjunto" é usada na Matemática de um modo muito mais rigoroso e preciso do que na vida diária.

Para guardar!

✔ Em problemas olímpicos, *temos de ter duas atitudes*: positiva ou negativa. A segunda torna-se atrativa quando temos elementos para suspeitar da veracidade do que se pede demonstrar.

✔ São *dicas muito úteis*, frequentemente aplicáveis:
– estudar casos extremos do problema
– pensar em dividir o problema em casos
– desenhar esquema ou figura que resuma as informações dadas no problema
– resolver o problema do fim para o começo

✔ São *cuidados obrigatórios*, para se evitar erros:
– fazer figuras cuidadosamente, em particular procurando manter proporções
– cuidado com o emprego de palavras, como todo X qualquer, necessário X suficiente.

TREINAMENTO OLÍMPICO

Problema 1 –
Achar o último dígito da expansão decimal de 2013^{2013}.

Problema 2 –
Mil e um problemas são feitos com a famosa sequência de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ *, que caracteriza-se por ter cada termo, a partir do terceiro, igual à soma dos dois anteriores. Aqui, tratemos de descobrir quantos múltiplos de* 4 *existem entre os primeiros mil termos da sequência.*
Dica: inicie estudando o quociente por 4 desses termos.

Problema 3 –
Um grupo de amigos gastou 43 min 12 seg para escalar 3/4 de uma montanha. Quando chegaram ao topo, viram que escalaram a segunda metade da montanha no mesmo tempo que gastaram para escalar a primeira. Ademais, gastaram 1min 36 seg menos tempo para escalar o último quarto da subida do que precisaram no terceiro quarto. Em quanto tempo escalaram a montanha?
Resp.: 56 min 32 seg.

Problema 4 –

a). *Achar todos os inteiros positivos* p *e* q*, tais que valha*

$$\frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \sqrt{p}-\sqrt{q}.$$

b). *Achar o menor inteiro positivo* n*, tal que*

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geqslant 100.$$

Resp.: b). $n = 10\,200$.